

Методика расчета кривой волатильности

1 Общая информация

Кривая волатильности (кривая подразумеваемой волатильности, *implied volatility curve*) строится для опционов пут и колл на один базовый фьючерс с одной датой экспирации. Обозначение вида *VolCurve(10.09, RTS-12.09)* указывает на кривую, рассчитанную по опционам с исполнением в октябре 2009 года, базовым активом которых является фьючерс на Индекс РТС с исполнением в декабре 2009 года.

При заведении в систему нового срока опционов начинается расчет соответствующей кривой волатильности.

Расчет кривых отключается за 10 минут до вечернего и дневного клирингов. В день исполнения маржируемых опционов, после окончания сессии, при старте выкачки в клиринг по исполняемым маржируемым опционам выставляются параметры кривой 0,0,1,0,1. По ним в клиринге рассчитываются ТЦ закрытия. Далее расчет кривой не ведется.

Ниже по тексту жирным шрифтом выделены настроечные параметры.

1.1 Исходные данные

Исходными данными для построения кривой волатильности являются:

- цены заявок на покупку и на продажу по каждой серии опционов, объемы заявок, и время непрерывного присутствия каждой заявки в списке активных заявок;
- T - время от текущего момента, то есть момента расчета кривой волатильности, до момента окончания торгов опционами, выраженное в долях года.
- F - текущая котировка базового фьючерсного контракта в момент построения кривой волатильности.

Заявки фильтруются по времени присутствия в системе и объему. Среди этих заявок для каждого опциона выделяются лучшие заявки: заявка на покупку с наибольшей ценой и заявка на продажу с наименьшей ценой. Если по некоторой серии опционов отсутствуют заявки на покупку или продажу, удовлетворяющие указанным критериям отбора, то считается, что соответствующая лучшая цена отсутствует.

Цены лучших заявок пересчитываются в подразумеваемые волатильности (*implied volatility*). Используется формула Блэка для маржируемых опционов на фьючерсы, то есть опционов с фьючерсным типом расчетов:

$$C = F \cdot N(d_1) - Strike \cdot N(d_2)$$

$$P = C - F + Strike$$

где C , P - цена опциона колл и пут соответственно,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{Strike}\right) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F}{Strike}\right) - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \text{функция стандартного нормального распределения.}$$

По цене C или P численным методом определяется подразумеваемая волатильность σ , которая для дальнейших расчетов умножается на 100. Если лучшая цена покупки или продажи на некотором страйке отсутствует, то соответствующая подразумеваемая волатильность принимается равной нулю.

В итоге для каждого страйка имеются 4 цены: *call_bid*, *call_ask*, *put_bid*, *put_ask*.

Для каждого страйка из имеющихся 4-х волатильностей формируются две величины: *bid*, *ask*. Сначала рассчитываются вспомогательные переменные *max_bid*, *min_ask*.

$$\max_bid = \begin{cases} \max(put_bid, call_bid), & \text{если имеются обе заявки} \\ \text{цена заявки}, & \text{если имеется только одна заявка} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\min_ask = \begin{cases} \min(put_ask, call_ask), & \text{если имеются обе заявки} \\ \text{цена заявки}, & \text{если имеется только одна заявка} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Затем рассчитываются bid , ask :

$$bid = \begin{cases} \min(\max_bid, \min_ask), & \text{если обе величины не равны нулю} \\ \max_bid, & \text{если } \max_bid > 0, \min_ask = 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$ask = \begin{cases} \max(\max_bid, \min_ask), & \text{если обе величины не равны нулю} \\ \min_ask, & \text{если } \min_ask > 0, \max_bid = 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Примечание. Если интервалы $(call_bid, call_ask)$ и (put_bid, put_ask) не пересекаются, то есть $call_bid > put_ask$ или $put_bid > call_ask$, то в соответствии с формулами выше в качестве интервала $bid - ask$ будет взят промежуток между этими интервалами, то есть $(put_ask, call_bid)$ в первом случае и $(call_ask, put_bid)$ во втором случае.

1.2 Формула кривой

Кривая волатильности представляет собой функцию:

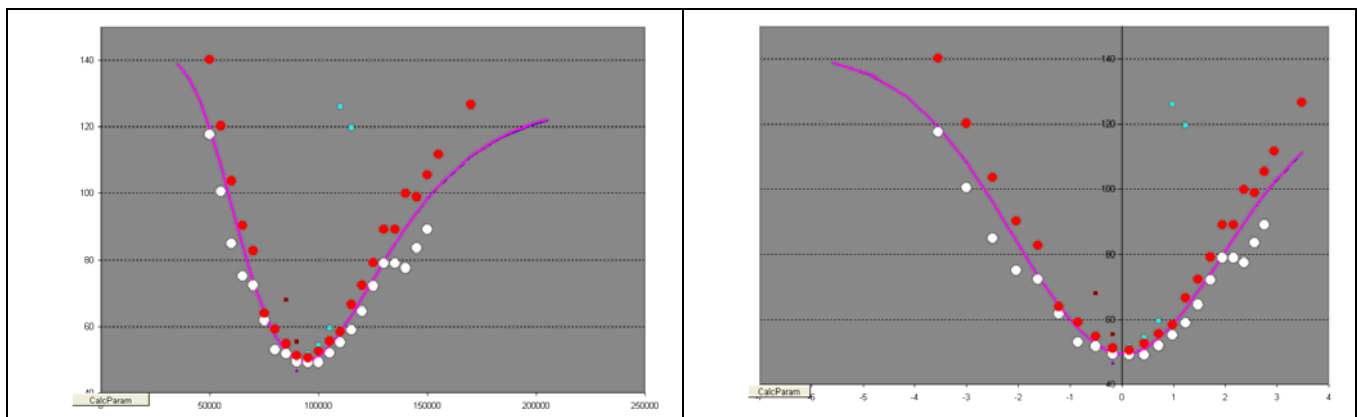
$$\sigma = f(x, s, a, b, c, d, e) = a + b * \left(1 - e^{-cy^2}\right) + \frac{d * \text{arctg}(e * y)}{e}$$

где

- s, a, b, c, d, e - параметры, подлежащие настройке; в дальнейшем эти параметры обозначаются соответственно $param(1)$, $param(2)$, ... $param(6)$, или сокращенно $param(1\div 6)$;
- $x = \frac{1}{\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Strike}{F}\right)$ - горизонтальная координата кривой, являющаяся по сути пересчитанным страйком, так как T и F фиксированы;
- $y = x - s$.

σ ограничивается параметрами **curve_min** и **curve_max**.

На рисунках в качестве иллюстрации показана одна и та же кривая волатильности для опционов на фьючерс на индекс РТС, где по горизонтальной оси отложены либо страйки, либо величина x . Белые и красные точки – это bid , ask соответственно.



1.3 Ограничения

Для *param(1÷6)* вводятся ограничения снизу **boundary_down(1÷6)** и ограничения сверху **boundary_up(1÷6)**. Все или некоторые ограничения могут отсутствовать.

Существует 4 способа привязки кривой:

Если **sample_variant** = 0, то опорной кривой нет.

Если **sample_variant** = 1, то опорная кривая задается вручную.

Если **sample_variant** = 2, то текущая кривая является опорной сама себе

Если **sample_variant** = 3, то указывается опорная кривая. Например, если строится *VolCurve(03.10, RTS-03.10)* на начальной стадии торговли мартовскими 2010 опционами, то в качестве опорной кривой может быть указана *VolCurve(12.09, RTS-12.09)*..

Суть привязки кривой заключается в том что текущая кривая не может отклоняться от опорной больше чем на соответствующие абсолютные и относительные ограничения

Абсолютные: **sample_deviation_absolute(1÷6)**.

Относительные: **sample_deviation_relative(1÷6)**.

Для относительных ограничений вводится также параметр **relative_threshold**. Если параметр *param(i)* меньше **relative_threshold**, то относительные ограничения к такому параметру не применяются.

Все исходные данные и ограничения проверяются на предмет непротиворечивости.

2 Подстройка кривой

Суть построения кривой заключается в минимизации штрафной (критериальной) функции C_r . Оптимизация проходит два этапа:

1. Грубая подстройка – метод псевдослучайных отклонений
2. Точная подстройка – метод покоординатного спуска

2.1 Грубая подстройка

Данный этап включается лишь при сильном несоответствии кривой текущей рыночной ситуации. То есть при высоких значениях критериальной функции

$$C_r \geq C_{r_rough}$$

Данный метод основан на сдвиге текущих параметров на $\xi \cdot 100$ процентов,

где ξ 6-мерная квазислучайная величина, равномерно распределенная на кубе $[-1.5; 1.5]$ получаемая из квазислучайной 6×16383 последовательности Соболя (равномерно распределенные на $[0, 1]$ величины).

Если итерация грубой подстройки успешна – то есть приводит к уменьшению критериальной функции, то производится проверка на монотонность цен опционов.

Если проверка проходит удачно – значения полученные в результате данной итерации принимаются

2.2 Точная подстройка

Точная настройка – метод покоординатного спуска. Один цикл точной настройки состоит в улучшении всех 6 координат последовательно:

Улучшение одной координаты происходит по следующему алгоритму:

1. *Выбирается начальный шаг: $Step = dparam(j) * param(j)$*
2. *Определяется направление движения: Рассчитываются критериальные функции для параметра сдвинутого на шаг вверх и вниз. направление движения определяется как направление в сторону наименьшего их них*
3. *Если сдвиг на данный шаг в данном направлении приводит к уменьшению критериальной функции - проверяется монотонность цены опционов*
4. *Если цены монотонны - возвращаемся к пункту 2)*
5. *Если цены не монотонны или критериальная функция не уменьшилась – уменьшаем шаг в 2 раза и переходим к пункту 2)*
6. *Цикл продолжается до тех пор, пока $step > 0.0001 * dparam(j) * param(j)$*

2.3 Монотонность

Производится проверка 2 различных типов монотонности.

1. Обычная

Рассчитываются цены опционов колл и пут для проверяемой кривой для всех торгуемых сегодня и потенциально торгуемых завтра страйков. Проверяется, что цены опционов колл монотонно убывают по страйку, а цены опционов пут монотонно возрастают.

2. Дифференциальная

Рассчитываются производные цены опциона колл и пут по страйку для проверяемой кривой для всех торгуемых сегодня и потенциально торгуемых завтра страйков.

$$\frac{\partial C}{\partial Strike} = N'(d2) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} - N(-d2) \quad \frac{\partial P}{\partial Strike} = \frac{\partial C}{\partial Strike} + 1$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0.01 \cdot (2 \cdot b \cdot c \cdot y \cdot \text{Exp}(-c \cdot y^2)) + \frac{d}{1 + e^2 y^2}$$

Проверяется, что производная колла не больше нуля, пута – не меньше нуля.

2.4 Критериальная функция

Критериальная функция рассчитывается как сумма экспонент ошибок по страйкам. Ошибки взвешиваются относительно удаленности от центрального страйка с помощью убывающей функции.